

**LAPORAN
PENELITIAN FUNDAMENTAL**



**INTEGRAL HENSTOCK DI DALAM RUANG METRIK KOMPAK LOKAL
DARI FUNGSI BERNILAI VEKTOR**

OLEH:

**Dr. Manuharawati, M.Si.
Dwi Nur Yuniarti, S.Si., M.Sc.**

**NIP. 196101181991032001
NIP. 198306292006042001**

**Dilaksanakan dengan Dana DP2M
Berdasarkan Surat Keputusan Rektor Universitas Negeri Surabaya
Nomor: 081/UN38/HK/LT/2013 tanggal 7 Februari 2013**

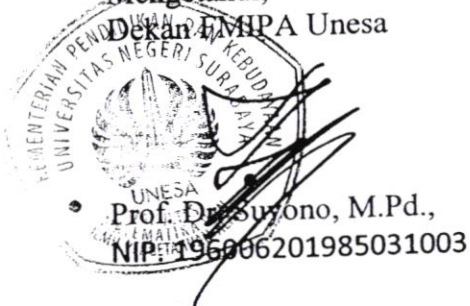
**KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT
UNIVERSITAS NEGERI SURABAYA
TAHUN 2013**

HALAMAN PENGESAHAN

1. Judul Penelitian
Kompak : Integral Henstock Di Dalam Ruang Metrik
Lokal Dari Fungsi Bernilai Vektor
2. Peneliti Utama : Dr. Manuharawati, M.Si.
 - a. Nama lengkap : L / P
 - b. Jenis Kelamin : 196101181991032001
 - c. NIP : Pembina/IVa
 - d. Pangkat/Golongan : -
 - e. Jabatan struktural : Lektor Kepala
 - f. Jabatan fungsional : FMIPA/ Matematika
 - g. Fakultas/Jurusan : Unesa
 - h. Pusat Penelitian : Jl. Raya Ketintang Surabaya
 - i. Alamat : 031-8297677
 - j. Telpon/Faks : Jl Ketintang Madya Cempaka Surabaya
 - k. Alamat Rumah : Perumahan Ketintang Residence no 61
 - l. Telpon/Faks : 0818468954/-
 - m. E-mail : manuhara1@yahoo.co.id
3. Jangka Waktu Penelitian : 10 bulan
4. Pembiayaan : Rp31.000.000,00
 - a. Biaya Tahun Pertama : Rp 65.000.000,00
 - b. Usul Biaya Tahun Kedua : Rp0,00
 - c. Biaya dari Instansi Lain

Mengetahui,

Dekan FMIPA Unesa



Prof. Dr. Suryono, M.Pd.,
NIP. 196006201985031003

Surabaya, 20 Nopember 2013

Ketua Peneliti,

Dr. Manuharawati, M.Si
NIP. 196101181991032001



Dr. Ir. I Wayan Susila, M.T.
NIP. 195312151980021002

LAPORAN KEMAJUAN
PENELITIAN FUNDAMENTAL



INTEGRAL HENSTOCK DI DALAM RUANG METRIK KOMPAK LOKAL
DARI FUNGSI BERNILAI VEKTOR

Dr. Manuharawati, M.Si
NIDN: 0018016103
Dwi Nur Yunianti, S.Si, M.Sc
NIDN : 0029068302

UNIVERSITAS NEGERI SURABAYA

Agustus 2013

HALAMAN PENGESAHAN

Judul : Integral Henstock Di Dalam Ruang Metrik Kompak
Lokal Dari Fungsi Bernilai Vektor

Peneliti/Pelaksana

Nama lengkap : Dr. Manuharawati, M.Si.

NIDN : 0018016103

Jabatan fungsional : Lektor Kepala

Program Studi : Matematika

Nomor HP : 0818468954

Alamat surel (email) : manuharawati@yahoo.co.id

Anggota (1)

Nama lengkap : Dwi Nur Yuniarti, S.Si, M.Sc

NIDN : 0029068302

Perguruan Tinggi : Unesa

Tahun Pelaksanaan : Tahun ke 1 dari rencana 2 tahun

Biaya Tahun Berjalan : Rp 31.000.000, 00

Biaya Keseluruhan : Rp 62.000.000, 00



Prof. Dr. Ir. I Wayan Susila, MT
NIP. 195312151980021002

Surabaya, 30 Agustus 2013
Ketua,

Dr. Manuharawati, M.Si
NIP. 196101181991032001

RINGKASAN

Di dalam integral jenis Reimann, khususnya integral Henstock, Kriteria Cauchy merupakan salah satu sifat dasar dari fungsi terintegral yang merupakan pijakan dari pengkajian sifat-sifat integral yang lebih kompleks dalam ruang fungsi yang sama. Di dalam laporan kemajuan ini dibahas lemma henstock dari fungsi bernilai vektor pada suatu sel di dalam ruang metrik kompak lokal.

PRAKATA

Laporan kemajuan penelitian yang berjudul **INTEGRAL HENSTOCK DI DALAM RUANG METRIK KOMPAK LOKAL DARI FUNGSI BERNILAI VEKTOR** ini menjelaskan tentang hasil penelitian yang telah dicapai mulai dari tanggal 11 Februari 2013 sampai tanggal 7 November 2013. Adapun prosentase capaian dari penelitian ini sebesar 85% dengan hasilnya yaitu telah diperoleh beberapa teori pendukung dan dibuktikan beberapa teorema yang menjelaskan tentang konsep dari **INTEGRAL HENSTOCK DI DALAM RUANG METRIK KOMPAK LOKAL DARI FUNGSI BERNILAI VEKTOR**. Tahapan berikutnya adalah membuat laporan penelitian dan SPJ.

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL	i
HALAMAN PENGESAHAN.....	ii
RINGKASAN	iii
PRAKATA.....	iv
DAFTAR ISI.....	v
BAB 1. PENDAHULUAN	1
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	2
BAB 3. TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN	4
BAB 4. METODE PENELITIAN.....	5
BAB 5. HASIL YANG DICAPAI.....	6
BAB 6. RENCANA TAHAPAN BERIKUTNYA	19
BAB 7. KESIMPULAN DAN SARAN.....	20
DAFTAR PUSTAKA	21

BAB 1

PENDAHULUAN

Banyak jenis integral yang digunakan dalam matematika terapan maupun pengembangan ilmu yang serumpun dengan teori integral, seperti regresi, fungsi kepadatan, dan teori persamaan diferensial. Jenis integral yang digunakan sebagian besar adalah integral Riemann dari fungsi bernilai real yang dibangun oleh G.F.B. Riemann pada tahun 1826-1866 (Jain dan Gupta, 1986: 27). Karena masih ada kelemahan pada teori integral Riemann, seperti adanya fungsi bernilai real dan terdefiniskan pada interval tertutup dan terbatas tetapi tidak terintegralkan Riemann pada interval tersebut, namun teori ini menjembatani para pakar matematika untuk mengembangkan dan menyempurnakan integral Riemann, seperti H. Lebesgue pada tahun 1902, Henstock dan Kurzweil (Henstock, 1968) maupun Lee P.Y (1995). Penggunaan integral Henstock ini sudah terlihat antara lain pada hasil penelitian yang membuktikan adanya penyelesaian diferensial terhadap integral Henstock yang telah dilakukan oleh Bambang Soedijono pada tahun 1997 (Bambang Soedijono, 1997: 89-100). Melanjutkan perkembangan teori integral, Manuharawati pada tahun 2002 berhasil membangun sistem interval pada ruang metrik kompak lokal (Manuharawati, 2002: 11 - 12), yang diikuti dengan dibentuknya integral Henstock dari fungsi bernilai real pada suatu sel di dalam ruang metrik kompak lokal (Manuharawati, 2002:57-58).

Selain mendefinisikan integral Henstock dari fungsi bernilai vektor, teori yang sangat penting yang telah dihasilkan di sini adalah karakteristik dari integral tersebut, yaitu sifat Cauchy (Manuharawati dan Dwi Nur Yunianti, 2013: 71 - 75).

Sebagai kelanjutan penelitian, setelah berhasil dibuktikan sifat Cauchy, penelitian ini mengkaji bentuk deskriptif integral Henstock dari fungsi bernilai vektor dan mencari syarat yang diperlukan agar Lemma Henstock pada integral fungsi bernilai vektor masih berlaku.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

Pada integral jenis Riemann, termasuk integral Henstock, pendefinisian fungsi terintegral selalu melibatkan partisi yang setiap anggota partisinya merupakan pasangan sel-titik dan ukuran yang terdefinisikan pada ruang metrik yang memuat sel tersebut. Partisi yang digunakan pada integral Henstock yang

merupakan pengitlakan integral Riemann adalah partisi yang setiap pasangan sel titiknya harus termuat di dalam persekitaran dengan pusat titiknya dan sebagai jari-jari adalah nilai fungsi dari titiknya. Fungsi yang dimaksud adalah fungsi bernilai real positif. Jika fungsi tersebut dinamakan δ , maka partisi yang terkait disebut partisi $\delta - fine$. Oleh karena itu untuk membangun suatu integral jenis Riemann diperlukan pengertian sel dan eksistensi partisi $\delta - fine$ pada sel tersebut.

Integral Henstock yang dibangun oleh Henstock dan Kurzweil pada tahun 1968, selnya adalah interval tertutup dan terbatas pada $\mathbb{R}$, ukuran yang digunakan adalah ukuran Lebesgue pada $\mathbb{R}$, dan fungsi yang terintegral adalah fungsi bernilai real.

Dengan mengitlakan pengertian sel pada $\mathbb{R}$ menjadi sel pada ruang metrik kompak lokal dan ukuran Lebesgue pada $\mathbb{R}$ menjadi volum pada koleksi semua himpunan elementer yang termuat di dalam sel, serta telah dijaminnya eksistensi partisi $\delta - fine$ pada suatu sel, Manuharawati (2002) berhasil membangun integral Henstock, yang disebut integral Henstock- ϑ pada ruang metrik kompak lokal dari fungsi bernilai real. Dalam integral Henstock- ϑ , sifat (kriteria) Cauchy masih berlaku seperti pada integral Henstock yang dibangun oleh Henstock dan Kurzweil.

Pada penelitian ini, integral yang dibahas adalah integral jenis Riemann yang merupakan pengitlakan integral Hensock (yang dibangun oleh Henstock dan Kurzweil pada tahun 1968) maupun integral Henstock- ϑ (yang dibangun oleh Manuharawati pada tahun 2002). Ditinjau dari integral Henstock, pengitlakan dilakukan pada domain, dan range dari nilai fungsi yang diintegalkan maupun ukuran yang digunakan. Jika ditinjau dari integral Henstock- ϑ , pengitlakan dilakukan hanya pada range fungsinya, yaitu dari ruang metrik biasa $\mathbb{R}$ menjadi ruang Banach. Melalui sifat-sifat sederhana pada integral Henstock- ϑ dari fungsi bernilai vektor, dikaji pula syarat perlu dan cukup suatu fungsi terintegral Henstock- ϑ , yaitu yang disebut dengan sifat (kriteria) Cauchy.

BAB 3

TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

3.1 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk membangun integral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal dari fungsi bernilai vektor.

3.2 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memberikan sumbangan pemikiran dalam rangka memperluas dan memperdalam wawasan tentang teori integral
2. Memberikan masukan bagi para pengguna integral dalam arti bahwa hasil penelitian dapat digunakan untuk penyelesaian masalah yang terkait dengan teori integral.

BAB 4

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah kajian pustaka, dalam arti mengkaji teori-teori integral, khususnya integral jenis Riemann maupun yang terkait melalui texbook, jurnal, prosiding atau internet, dan mengkomunikasikan hasil kajian melalui diskusi dengan sejawat yang sebidang

melalui seminar dan mengkomunikasikan lewat seminar (prosiding) ataupun majalah ilmiah.

BAB 5

HASIL YANG DICAPAI

5.1 Pengertian Dasar dan Teori Pendukung

Di dalam laporan ini, ruang metrik kompak lokal, khususnya ruang metrik kompak lokal non-diskret, dinotasikan dengan X ; himpunan semua bilangan real

diperluas dengan $\mathbb{R}^*$; himpunan semua bilangan real positif murni dengan $\mathbb{R}^+$; koleksi semua himpunan elementer di dalam X dengan $E(X)$, sistem interval pada X dinotasikan dengan S .

Definisi 5.1 : Diketahui ruang metrik kompak lokal (X, d) , koleksi $S \subset 2^X$ yang tidak kosong disebut **sistem interval** (system of intervals) jika memenuhi:

- (i) untuk setiap $p \in X, \{p\} \in S$,
- (ii) untuk setiap $p \in X$, jika $cl(N(p, r))$ kompak maka $N(p, r) \in S$,
- (iii) jika $A \in S$ maka A konveks, $cl(A)$ kompak, $cl(A) \in S$, dan $int(A) \in S$,
- (iv) untuk setiap $A, B \in S, A \cap B \in S$.
- (v) untuk setiap $A, B \in S$ terdapat $C_i \in S, 1 \leq i \leq n$ dengan $\{C_i, 1 \leq i \leq n\}$ tidak tumpang tindih dan

$$A \cup B = \bigcup_{i=1}^n C_i$$

Lebih lanjut, jika S merupakan sistem interval di dalam ruang metrik (X, d) , setiap anggota S disebut **interval**.

Definisi 5.2 : Interval $A \in S$ dikatakan **degenerate** jika $int(A) = \emptyset$ dan **nondegenerate** jika $int(A) \neq \emptyset$.

Definisi 5.3 : Sel adalah interval kompak yang nondegenerate. Himpunan $A \subset X$ disebut **himpunan elementer** (elementary set) jika A dapat disajikan sebagai gabungan hingga interval-interval. Jadi A himpunan elementer jika dan hanya jika terdapat $C_i \in S, (1 \leq i \leq n)$ sehingga

$$A = \bigcup_{i=1}^n C_i.$$

Definisi 5.4 : Jika $E(X)$ menyatakan koleksi semua himpunan elementer yang termuat di dalam X , fungsi volume $\vartheta: E(X) \rightarrow \mathbb{R}$ disebut **ukuran** pada $E(X)$ jika:

- (i) $\vartheta(A) = 0$ jika $int(A) = \emptyset$ dan $\vartheta(A) > 0$ jika $int(A) \neq \emptyset$
- (ii) $\vartheta(A) \leq \vartheta(B)$ untuk setiap $A, B \in E(X)$ dengan $A \subset B$,

(iii) $\vartheta(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \vartheta(A_i)$ untuk setiap himpunan $\{A_i\} \subset E(X)$ yang tidak tumpang tindih dengan $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in E(X)$.

Selanjutnya di dalam penelitian ini, dibatasi ruangmetrik X adalah kompak lokal nondiskret.

Definisi 5.5: Jika diberikan himpunan elementer kompak (sel) E dengan $\text{int}(E) \neq \emptyset$ dan fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$, maka koleksi hingga pasangan sel-titik

$$P = \{(A_{x_i}, x_i), 1 \leq i \leq n\} = \{(A_x, x)\}$$

Disebut **Partisi Perron δ -fine** pada E jika $x_i \in A_{x_i} \subset N(x_i, \delta(x_i))$ dan $\{A_{x_i}\}$ merupakan partisi pada E . Jika syarat $A_{x_i} \subset N(x_i, \delta(x_i))$ dihilangkan, maka partisi tersebut disebut partisi McShane δ -fine.

Jika diberikan himpunan elementer kompak (sel) $E \subset X$ dengan $\text{int}(E) \neq \emptyset$ dan fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$, maka terdapat partisi Perron δ -fine pada E . (Manuharawati, 2002: 18). Lebih lanjut, jika fungsi $\delta_1: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ dan $\delta_2: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ dengan $\delta_1(x) \leq \delta_2(x)$ untuk setiap $x \in E$, maka setiap partisi Perron δ_1 -fine pada E merupakan partisi Perron δ -fine pada E . (Manuharawati, 2002: 19).

Definisi 5.6 : Suatu himpunan X yang tak kosong yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian skalar (.) disebut ruang linear (ruang vektor) atas lapangan $\mathbb{R}$ jika memenuhi :

- i) Setiap $x, y \in X$ terdapat dengan tunggal $z \in X$ sehingga $z = x + y$.
- ii) $x + y = y + x$ untuk setiap $x, y \in X$.
- iii) $x + (y + z) = (x + y) + z$ untuk setiap $x, y, z \in X$.
- iv) Terdapat $0 \in X$ sehingga $x + 0 = 0 + x = x$ untuk setiap $x \in X$.
- v) Setiap $x \in X$ terdapat $-x \in X$ sehingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
- vi) Setiap $x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ terdapat dengan tunggal $z \in X$ sehingga $z = \alpha x$.
- vii) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.
- viii) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- ix) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- x) $1x = x$ untuk setiap $x \in X$.

Definisi 5.7 : Suatu fungsi $\| \cdot \|$ dari ruang Vektor Y (atas lapangan K) ke $\mathbb{R}$ disebut norm pada Y jika untuk setiap $x, y \in Y$ dan setiap $\alpha \in K$ memenuhi:

- (i) $\|x\| \geq 0$.
- (ii) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \mathbf{0}$.
- (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.
- (iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ruang vektor Y yang dilengkapi dengan norm $\| \cdot \|$ disebut ruang bernorm. Jika $(Y, \| \cdot \|)$ ruang bernorm, maka untuk setiap $x, y \in Y$ berlaku: (i) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = \mathbf{0}$ dan (ii) $\|x - y\| \geq \| \|x\| - \|y\| \|$. Selanjutnya jika didefinisikan fungsi $d: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = \|x - y\|$, maka d merupakan metrik pada Y . (Brown and Page, 1970: 85, 90). Metrik yang demikian disebut metrik yang dibangkitkan oleh norm $\| \cdot \|$. Berikut ini diberikan konsep tentang ruang Banach.

Definisi 5.8 : Diketahui X ruang bernorma. Fungsi dari $\mathbb{N}$ ke X disebut barisan pada X , dinotasikan dengan $\{x_n\}$.

Definisi 5.9 : Diketahui X ruang bernorma. Barisan $\{x_n\} \subseteq X$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ berlaku

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Lebih lanjut, x disebut limit barisan $\{x_n\}$, dituliskan $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ atau $x_n \rightarrow x$ untuk $n \rightarrow \infty$.

Definisi 5.10 : Diketahui X ruang bernorma. Barisan $\{x_n\} \subseteq X$ disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$ berlaku

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Definisi 5.11 : Ruang bernorma X dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di X konvergen ke $x \in X$. Ruang bernorma yang lengkap disebut sebagai ruang Banach.

Lebih lanjut, setiap barisan Cauchy pada X adalah konvergen.

5.2 Pembahasan

Dalam bagian ini ruang metrik kompak lokal dinotasikan dengan X dan ruang Banach dengan Y .

Definisi 5.1: Fungsi $g: X \rightarrow Y$ dikatakan **terintegral- ϑ Henstock** (Henstock- ϑ -integrable) pada sel $E \subset X$ jika terdapat vektor $a \in Y$ dengan sifat untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine

$$P = \{(A_{x_i}, x_i), 1 \leq i \leq n\} = \{(A_x, x)\}$$

pada E berlaku

$$\left\| \sum_{i=1}^n g(x_i) \vartheta(A_{x_i}) - a \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n g(x_i) \vartheta(A_{x_i}) - a \right\| < \varepsilon$$

dengan $\sum$ merupakan jumlahan atas partisi P . Jika $A \in S$ dengan $\vartheta(A) = 0$, maka integral- ϑ Henstock fungsi $g: X \rightarrow Y$ pada A didefinisikan sama dengan vektor nol (0).

Himpunan semua fungsi yang terintegral- ϑ Henstock pada sel E dinotasikan dengan $H(E, \vartheta)$ dan vektor a pada Definisi 5.1 disebut nilai integral- ϑ dari fungsi f pada E dan dinotasikan dengan

$$(H - \vartheta) \int f = a.$$

Beberapa sifat fungsi terintegral- ϑ Henstock pada sel E dituangkan pada teorema-teorema berikut. Adapun dalam pembahasan ini yang dimaksud fungsi yang terintegral adalah fungsi dari ruang metrik kompak lokal nondikret X ke ruang Banach Y , sedang sel adalah sel di dalam ruang metrik X , dan vektor adalah anggota Y .

Teorema 5.1 Jika $g \in H(E, \vartheta)$, maka nilai integral- ϑ dari fungsi f pada E adalah tunggal.

Bukti: Misalkan a dan b masing-masing merupakan nilai integral- ϑ dari fungsi f pada E dan ε adalah sebarang bilangan real dengan $\varepsilon > 0$. Berdasarkan Definisi 3.1, terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine

$$P = \{(A_x, x)\} \text{ dan } Q = \{(B_y, y)\}$$

pada E sehingga berlaku

$$\left\| \sum g(x) \vartheta(A_x) - a \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

dan

$$\left\| \sum g(x) \vartheta(A_x) - b \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} \|a - b\| &\leq \left\| \sum g(x) \vartheta(A_x) - a \right\| + \left\| \sum g(x) \vartheta(A_x) - b \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Menurut sifat bilangan real, diperoleh

$$\|a - b\| = 0$$

(Bartle, 2000:27). Akibatnya $a = b$. ■

Teorema 5.2 berikut merupakan salah satu karakteristik suatu fungsi bernilai vektor terintegral- ϑ Henstock pada suatu sel.

Teorema 5.2 (Kriteria Cauchy): Fungsi $g \in H(E, \vartheta)$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine $P = \{(A_x, x)\}$ dan $Q = \{(B_y, y)\}$ pada E berlaku

$$\left\| P \sum g(x) \vartheta(A_x) - Q \sum g(y) \vartheta(B_y) \right\| < \varepsilon.$$

Bukti: Syarat perlu: Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Karena $g \in H(E, \vartheta)$, maka terdapat dengan tunggal vektor $a \in Y$ dan terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine $P = \{(A_x, x)\}$ pada E berlaku

$$\left\| P \sum g(x) \vartheta(A_x) - a \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Jika $Q = \{(B_y, y)\}$ sebarang partisi Perron δ -fine pada E , maka berlaku $\left\| Q \sum g(y) \vartheta(B_y) - a \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Akibatnya diperoleh

$$\begin{aligned}
& \left\| P \sum g(x) \vartheta(A_x) - Q \sum g(y) \vartheta(B_y) \right\| \\
& \leq \|P \sum g(x) \vartheta(A_x) - a\| + \|Q \sum g(y) \vartheta(B_y) - a\| \\
& \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Syarat cukup: Dari yang diketahui, untuk sebarang bilangan asli n terdapat fungsi $\delta_n : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ_n -fine

$$P = \{(A_x, x)\} \text{ dan } Q = \{(B_y, y)\}$$

pada E berlaku

$$\|P \sum g(x) \vartheta(A_x) - Q \sum g(y) \vartheta(B_y)\| < \frac{1}{n}. \quad (1)$$

Selanjutnya dapat diasumsikan bahwa untuk setiap bilangan asli n dan setiap $x \in E$ berlaku $\delta_{n+1}(x) \leq \delta_n(x)$. Jika untuk setiap bilangan asli n $P_n = \{(A_x, x)\}$ merupakan partisi Perron δ_n -fine pada E , maka menurut (1),

$$(P_n \sum g(x) \vartheta(A_x)) \quad (2)$$

merupakan barisan Cauchy di dalam Y . Karena Y merupakan ruang Banach, maka (2) merupakan barisan konvergen. Jadi terdapat dengan tunggal vektor $a \in Y$ sehingga (2) konvergen ke a . Selanjutnya diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Karena (2) konvergen ke a , maka terdapat bilangan asli K dengan $K \geq \frac{\varepsilon}{3}$ sehingga

$$\|P_K \sum g(x) \vartheta(A_x) - a\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3)$$

Jika $P = \{(C_z, z)\}$ sebarang partisi Perron δ_K -fine pada E , maka dengan menggunakan (1) dan (3) diperoleh

$$\begin{aligned}
& \left\| P \sum g(z) \vartheta(C_z) - a \right\| \\
& \leq \|P \sum g(z) \vartheta(C_z) - P_K \sum g(x) \vartheta(A_x)\| + \|P_K \sum g(x) \vartheta(A_x) - a\| \\
& < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hal ini membuktikan bahwa $g \in H(E, \vartheta)$. ■

Dari alur pembuktian Teorema Cauchy, maka dapat dicatat bahwa suatu fungsi bernilai vektor, rangenya merupakan ruang bernorma tetapi tidak lengkap (bukan ruang Banach) maka tidak dapat dijamin bahwa barisan Chauchy di dalamnya konvergen. Akibatnya jaminan terintegralnya fungsi tersebut masih

diragukan. Dengan kata lain tidak ada jaminan tentang berlakunya Kriteria Cauchy.

Dengan menggunakan Kriteria Cauchy dapat dibuktikan bahwa jika fungsi bernilai vektor g terintegral- ϑ Henstock pada sel E , maka g terintegral pada setiap sel bagian dari E . Sifat ini dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 5.3: *Jika $g \in H(E, \vartheta)$, maka untuk setiap sel $F \subset E$, $g \in H(F, \vartheta)$.*

Bukti: Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Karena $g \in H(E, \vartheta)$, maka berdasarkan Kriteria Cauchy, terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine $P = \{(A_x, x)\}$ dan $Q = \{(B_y, y)\}$ pada E berlaku

$$\|P \sum g(x) \vartheta(A_x) - Q \sum g(y) \vartheta(B_y)\| < \varepsilon \quad (4)$$

Karena E dan F masing-masing merupakan sel dengan $F \subset E$, maka berdasarkan aksioma sistem interval, terdapat koleksi hingga sel-sel $\{C_i: i = 1, 2, \dots, n\}$ yang tidak tumpang tindih sehingga

$$cl(E - F) = \bigcup_{i=1}^n C_i$$

Jika P_1 dan P_2 merupakan partisi Perron δ -fine pada F dan P_{3i} merupakan partisi Perron δ -fine pada C_i , maka

$$P_4 = P_1 \cup (\bigcup_{i=1}^n P_{3i}) \text{ dan } P_5 = P_2 \cup (\bigcup_{i=1}^n P_{3i})$$

masing-masing merupakan partisi Perron δ -fine pada E . Oleh karena itu dengan menggunakan (4) diperoleh

$$\begin{aligned} & \|P_1 \sum g(x) \vartheta(A_x) - P_2 \sum g(y) \vartheta(B_y)\| \\ & \leq \|P_1 \sum g(x) \vartheta(A_x) - P_2 \sum g(y) \vartheta(B_y)\| \end{aligned}$$

$< \varepsilon$.

Berdasarkan Kriteria Cauchy, $g \in H(F, \vartheta)$. ■

Seperti yang telah dikemukakan pada bagian sebelumnya, pada bagian ini yang dimaksud X adalah ruang metrik kompak lokal, sedang Y adalah ruang Banach.

Teorema 5.4: Diberikan dua sel E dan F yang tidak tumpang tindih dengan $E, F \in \mathcal{S}$,
 dan g adalah fungsi bernilai vektor (kodomain dari g adalah Y). Jika $g \in H(E, \vartheta)$ dan $g \in H(F, \vartheta)$, maka $g \in H(E \cup F, \vartheta)$ dengan

$$(H - \vartheta) \int_{E \cup F} g = (H - \vartheta) \int_E g + (H - \vartheta) \int_F g.$$

Bukti: Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Karena $g \in H(E, \vartheta)$ dan $g \in H(F, \vartheta)$, maka berdasarkan Definisi 5.1, terdapat dengan tunggal vektor $a, b \in Y$ dan terdapat fungsi $\delta_1 : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ dan $\delta_2 : F \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron $\delta_1 - \text{fine } P_1 = \{(A_x, x)\}$ pada E dan partisi Perron $\delta_2 - \text{fine } P_2 = \{(B_y, y)\}$ pada F berlaku

$$\|P_1 \sum g(x) \vartheta(A_x) - a\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ dan } \|P_2 \sum g(y) \vartheta(B_y) - b\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dibentuk fungsi $\delta : E \cup F \rightarrow \mathbb{R}^+$ dengan

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\{\delta_1(x), d(x, F)\} & \text{jika } x \in E - F \\ \min\{\delta_2(x), d(x, E)\} & \text{jika } x \in F - E \\ \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\} & \text{jika } x \in E \cap F \end{cases}$$

Jika diambil sebarang partisi Perron $\delta - \text{fine } P = \{(A_x, x)\}$ pada $E \cup F$ dan dibentuk

$$P_3 = \{(A_x, x) \in P : x \in E - F\}$$

$$P_4 = \{(A_x, x) \in P : x \in F - E\}$$

$$P_5 = \{(B_x, x) : x \in E \cap F, B_x = A_x \cap E, (A_x, x) \in P\}$$

$$P_6 = \{(C_x, x) : x \in E \cap F, C_x = A_x \cap F, (A_x, x) \in P\},$$

maka diperoleh:

$$P_3 \cup P_5 \text{ merupakan partisi Perron } \delta - \text{fine} \text{ pada } E$$

dan

$P_4 \cup P_6$ merupakan partisi Perron $\delta - fine$ pada F .

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned}
& \|P \sum g(x) \vartheta(A_x) - (a + b)\| = \\
& \left\| P_3 \sum g(x) \vartheta(A_x) + P_4 \sum g(x) \vartheta(A_x) + \sum_{x \in E \cap F} g(x) \vartheta(B_x \cup C_x) - (a + b) \right\| \\
& \leq \left\| P_3 \sum g(x) \vartheta(A_x) + P_5 \sum g(x) \vartheta(B_x) - a \right\| \\
& + \left\| P_4 \sum g(x) \vartheta(A_x) + P_6 \sum g(x) \vartheta(C_x) - b \right\| \\
& < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 5.1, terbukti bahwa $g \in H(E \cup F, \vartheta)$ dengan

$$(H - \vartheta) \int_{E \cup F} g = (H - \vartheta) \int_E g + (H - \vartheta) \int_F g. \blacksquare$$

Teorema 5.5 : Diberikan sel E, F dengan $F \subset E$; $f: E \rightarrow Y$. Jika $g \in H(F, \vartheta)$, maka

$$\begin{aligned}
& g \in H(Cl(E - F), \vartheta) \quad \text{dengan} \quad (H - \vartheta) \int_E g = (H - \vartheta) \int_{Cl(E - F)} g + \\
& (H - \vartheta) \int_F g.
\end{aligned}$$

Bukti: Karena E dan F masing-masing merupakan sel dengan $F \subset E$, maka berdasarkan aksioma sistem interval, terdapat koleksi hingga sel-sel $\{C_i: i = 1, 2, \dots, n\}$ yang tidak tumpang tindih sehingga

$$cl(E - F) = \bigcup_{i=1}^n C_i$$

Karena E merupakan sel, maka untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$, berlaku

$$C_i \subset cl(E - F) \subset E.$$

Berdasarkan Teorema 5.3, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$, berlaku

$$g \in H(C_i, \vartheta)$$

Dengan menggunakan Teorema 5.4, diperoleh $g \in H(Cl(E - F), \vartheta)$ dengan

$$(H - \vartheta) \int_{Cl(E-F)} g = \bigcup_{i=1}^n (H - \vartheta) \int_{C_i} g.$$

Akibatnya

$$(H - \vartheta) \int_E g = (H - \vartheta) \int_{Cl(E-F)} g + (H - \vartheta) \int_F g. \blacksquare$$

Selanjutnya jika $I(E)$ merupakan koleksi semua interval yang termuat di dalam E , maka dengan mengacu pada Teorema 5.1 dan 5.5, terbentuk suatu fungsi aditif $G: I(E) \rightarrow Y$ dengan $G(\emptyset) = \mathbf{0}$ (vektor nol) dan untuk setiap $A \in I(E)$ dengan $A \neq \emptyset$, berlaku

$$G(A) = (H - \vartheta) \int_{Cl(A)} g.$$

Dengan menggunakan kenyataan ini dapat dibuktikan karakteristik dari fungsi bernilai vektor yang terintegral- ϑ Henstock.

Teorema 5.6: Fungsi $g: X \rightarrow Y$ adalah terintegral- ϑ Henstock (Henstock ϑ -integrable) pada sel $E \subset X$ jika dan hanya jika terdapat fungsi aditif $G: I(E) \rightarrow Y$ dengan sifat untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine

$$P = \{(A_{x_i}, x_i), 1 \leq i \leq n\} = \{(A_x, x)\}$$

pada E berlaku

$$\left\| \sum_{i=1}^n g(x_i) \vartheta(A_{x_i}) - G(E) \right\| = \left\| P \sum g(x) \vartheta(A_x) - G(E) \right\| < \varepsilon.$$

Bukti: Berdasarkan Definisi 5.1, Fungsi $g: X \rightarrow Y$ dikatakan terintegral- ϑ Henstock (Henstock ϑ -integrable) pada sel $E \subset X$ jika dan hanya jika terdapat vektor $a \in Y$ dengan sifat untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine

$$P = \{(A_{x_i}, x_i), 1 \leq i \leq n\} = \{(A_x, x)\}$$

pada E berlaku

$$\left\| \sum_{i=1}^n g(x_i) \vartheta(A_{x_i}) - a \right\| = \left\| P \sum g(x) \vartheta(A_x) - a \right\| < \varepsilon$$

Jika $P = \{(A_{x_i}, x_i), 1 \leq i \leq n\} = \{(A_x, x)\}$ adalah sebarang partisi Perron δ -fine pada E , maka A_x merupakan sel dan $A_x \subset E$. Akibatnya untuk setiap A_x berlaku $\vartheta(A_x) \in H(A_x, \vartheta)$. Dengan menggunakan Teorema 5.3, 5.4, dan 5.5, maka diperoleh bahwa fungsi $g: X \rightarrow Y$ adalah terintegral- ϑ Henstock pada sel $E \subset X$ jika dan hanya jika terdapat fungsi aditif $G: I(E) \rightarrow Y$ dengan sifat untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine

$$P = \{(A_{x_i}, x_i), 1 \leq i \leq n\} = \{(A_x, x)\}$$

pada E berlaku

$$\left\| \sum_{i=1}^n g(x_i) \vartheta(A_{x_i}) - G(E) \right\| = \left\| P \sum g(x) \vartheta(A_x) - G(E) \right\| < \varepsilon. \blacksquare$$

Teorema 5.7 (Lemma Henstock): Jika fungsi $g: X \rightarrow Y$ terintegral- ϑ Henstock pada sel $E \subset X$ dengan fungsi primitif G , maka untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat

fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine $P = \{(A_x, x)\}$ dan sebarang $Q \subset P$ berlaku

$$\|Q \sum [g(x)\vartheta(A_x) - G(A_x)]\| < 2\varepsilon.$$

Bukti: Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Karena g terintegral-9Henstock pada sel E , maka menurut Teorema 5.6 terdapat fungsi aditif $G: I(E) \rightarrow Y$ dan fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine

$$P = \{(A_x, x)\}$$

pada E berlaku

$$\|P \sum [g(x)\vartheta(A_x) - G(A_x)]\| < \varepsilon.$$

Diambil sebarang $Q \subset P$. Misalkan E_1 adalah gabungan semua A_x dengan

$(A_x, x) \in P$ tetapi $(A_x, x) \notin Q$. Berdasarkan Teorema 5.4, $g \in H(E_1, \vartheta)$.

Berdasarkan Teorema 5.6, terdapat fungsi $\delta_1: E_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ_1 -fine pada E_1 berlaku

$$\|P_1 \sum [g(x)\vartheta(A_x) - G(A_x)]\| < \varepsilon.$$

Selanjutnya dibentuk fungsi $\delta_2: E_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ dengan

$$\delta_2(x) = \begin{cases} \min\{\delta_1(x), \delta(x) \text{ jika } x \in cl(E - E_1)\} \\ \min\{\delta_1(x), \delta(x), d(x, cl(E - E_1)), \text{ jika } x \in int(E_1)\} \end{cases}$$

Jika P_2 merupakan partisi Perron δ_2 -fine pada E_1 , maka P_2 merupakan partisi Perron δ_1 -fine pada E_1 dan $P_3 = Q \cup P_2$ merupakan partisi Perron δ -fine pada E . Oleh karena itu berlaku:

$$\begin{aligned} & \|Q \sum [g(x)\vartheta(A_x) - G(A_x)]\| \\ &= \|P_3 \sum [g(x)\vartheta(A_x) - G(A_x)] - \|P_2 \sum [g(x)\vartheta(A_x) - G(A_x)]\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|P_3 \sum [g(x)\vartheta(A_x) - G(A_x)]\| + \|P_2 \sum [g(x)\vartheta(A_x) - G(A_x)]\| \\
&< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon . \blacksquare
\end{aligned}$$

BAB 6

RENCANA TAHAPAN BERIKUTNYA

Tahapan berikutnya dalam pelaksanaan penelitian ini adalah penyusunan laporan akhir penelitian dan pertanggungjawaban keuangan (SPJ).

BAB 7

KESIMPULAN DAN SARAN

Dari uraian dalam pembahasan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Dalam mendefinisikan integral ϑ -Henstock suatu fungsi bernilai vektor, range dari fungsinya tidak harus ruang Banach, tetapi cukup ruang bernorma.
2. Syarat perlu dan cukup berlakunya Kriteria Cauchy pada ruang fungsi terintegral ϑ -Henstock dari fungsi bernilai vektor adalah: “range dari fungsinya merupakan ruang Banach”.
3. Dengan menggunakan sifat ketransitifan, maka dapat disimpulkan bahwa ketunggalan nilai integral dan sifat Cauchy merupakan syarat perlu dan cukup terjaminnya Lemma Henstock. Oleh karena itu nilai fungsi yang terintegral tidak hanya bernilai vektor, melainkan vektor tersebut harus berada di dalam ruang bernorma yang lengkap (ruang Banach).

DAFTAR PUSTAKA

Barttle, R.G., 2000, "*Intoduction to Real Analysis*", John Wiley & Sons, Inc., New York.

Brown, A.L. and Page, A., 1970, *Elements of Functional Analysis*, Van Nostrand Reinhold Company, New York.

Henstock, R., 1968, "A Riemann-Type Integral of Lebesgue Poer", Canadian J.Math.Soc.,20, 79-87.

Jain P.K. and Gupta V.P., 1986, *Lebesgue Measure and Integration*, Wiley Eastern Limited, New Delhi.

Lee, P. Y., 1995 , " *Measurability and the Henstock Integral*", Proceeding internat. Math. Conf. 1994, 99 – 106, World Scientific, Kaohsiung.

Manuharawati. 2002, *Integral henstock di dalam Ruang Metrik Kompak Lokal*, Disertasi PPs UGM Yogyakarta.